2. Język matematyki

2.1. Zbiory

1. Uzupełnij tabelę.

Liczba	Zbiór dzielników naturalnych liczby
12	$\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$
64	
75	
79	

2. Zapisz zbiór, podając wszystkie jego elementy.

a) $\{x \in \mathbf{C} : x^2 < 10\} = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$

b) $\{x \in \mathbf{N} : x^2 < 25\} =$

c) $\{x \in \mathbf{C} : 1 < x^2 \leqslant 16\} =$

Stosujemy oznaczenia:
N – zbiór liczb naturalnych,
C – zbiór liczb całkowitych,
W – zbiór liczb wymiernych,
R – zbiór liczb rzeczywistych.

3. Wskaż zdania prawdziwe.

- [ ] A. $\sqrt{144} \in \mathbf{W}$
- [ ] C. $\sqrt{\frac{25}{16}} \in \mathbf{N}$
- [ ] E. $\pi \notin \mathbf{W}$
- [ ] B. $\frac{75}{3} \in \mathbf{C}$
- [ ] D. $3{,}(14) \in \mathbf{W}$
- [ ] F. $\sqrt[3]{1000} \notin \mathbf{C}$

4. Który z poniższych zbiorów jest zbiorem pustym?

$A = \{x \in \mathbf{R} : x^2 + 1 \leqslant 0\}$ $\quad D = \{x \in \mathbf{N} : x^2 = 2^{10}\}$

$B = \{x \in \mathbf{R} : x^2 - 1 \leqslant 0\}$ $\quad E = \{x \in \mathbf{W} : x^2 = 900\}$

$C = \{x \in \mathbf{N} : x^2 < x\}$ $\quad F = \{x \in \mathbf{W} : x^2 = 1000\}$

Zbiór pusty oznaczamy symbolem $\emptyset$.

$A = \emptyset,$

5. Które z poniższych zbiorów są zbiorami nieskończonymi?

$A = \{x \in \mathbf{N} : x \leqslant 1000\}$ $\quad C = \{x \in \mathbf{C} : x^2 \leqslant 100\}$ $\quad E = \{x \in \mathbf{R} : x \leqslant 100\}$

$B = \{x \in \mathbf{C} : x \leqslant 1000\}$ $\quad D = \{x \in \mathbf{W} : x^2 \leqslant 100\}$ $\quad F = \{x \in \mathbf{R} : x^2 < 100\}$

6. Uzupełnij jednym z symboli: $\subset$, $\not\subset$.

a) $\mathbf{C}$ ☐ $\mathbf{N}$ d) $\mathbf{N}$ ☐ $\mathbf{C}$

b) $\mathbf{C}$ ☐ $\mathbf{W}$ e) $\mathbf{W}$ ☐ $\mathbf{C}$

c) $\mathbf{W}$ ☐ $\mathbf{R}$ f) $\mathbf{R}$ ☐ $\mathbf{W}$

Zbiór A jest **podzbiorem** zbioru B (mówimy też, że zbiór A jest zawarty w zbiorze B), jeśli każdy element zbioru A jest elementem zbioru B. Zapisujemy to: $A \subset B$. Zapis $A \not\subset B$ oznacza, że zbiór A nie jest podzbiorem zbioru B.

7. Sprawdź, czy dla zbiorów A i B zachodzi któraś z relacji: $A \subset B$, $B \subset A$.

a) $A = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4\}$, $B = \{0, 2, 4\}$ $A \not\subset B,\ B \subset A$

b) $A = \{-1, 0, 1, 2\}$, $B = \{-2, -1, 0, 1, 2, 9\}$ ....

c) $A = \{-1, 0, 1, 2\}$, $B = \{-2, 0, 2, 4\}$ ....

d) $A = \{x \in \mathbf{C} : x^2 \leqslant 9\}$, $B = \{x \in \mathbf{N} : x^2 \leqslant 9\}$ ....

e) $A = \{x \in \mathbf{C} : x^2 \leqslant 9\}$, $B = \{x \in \mathbf{W} : x^2 \leqslant 9\}$ ....

8. Sprawdź, które z podanych zbiorów są równe.

a) $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 6\}$, $C = \{1, 3, 2, 4\}$ $A = C,\ A \neq B,\ B \neq C$

b) $A = \{\frac{1}{2}, 1, 2, -(-2)^2\}$, $B = \{\frac{1}{2}, 1, 2, 4\}$, $C = \{1, 4, \sqrt{\frac{1}{4}}, \sqrt[3]{8}\}$

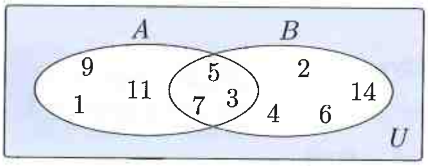
....

c) $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, $B = \{x \in \mathbf{C} : x^2 \leqslant 4\}$, $C = \{x \in \mathbf{C} : x^2 \leqslant 8\}$

....

2.2. Działania na zbiorach

9. Wypisz elementy podanych zbiorów, korzystając z diagramu.



Iloczynem zbiorów A i B nazywamy zbiór elementów, które należą jednocześnie do obu tych zbiorów:
$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ i } x \in B\}.$$

$A =$ .... $B =$ .... $A \cap B =$ ....

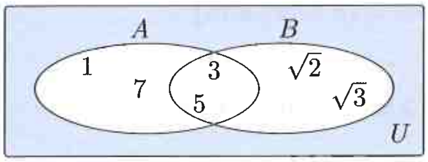
10. Podaj elementy zbioru $A \cap B$.

a) $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $B = \{\sqrt{4}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{9}\}$ $A \cap B = \{2, 3\}$

b) $A = \{x \in \mathbf{N} : x^2 < 25\}$, $B = \{x \in \mathbf{N} : x^2 \geqslant 4\}$ $A \cap B =$ ....

c) $A = \{x \in \mathbf{C} : x^2 \leqslant 36\}$, $B = \{x \in \mathbf{C} : x^2 > 16\}$ $A \cap B =$ ....

11. Wypisz elementy podanych zbiorów, korzystając z diagramu.



Sumą zbiorów A i B nazywamy zbiór elementów, które należą do co najmniej jednego z tych zbiorów:

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ lub } x \in B\}.$$

$A =$ $\qquad$ $B =$ $\qquad$ $A \cup B =$

12. Podaj elementy zbioru $A \cup B$.

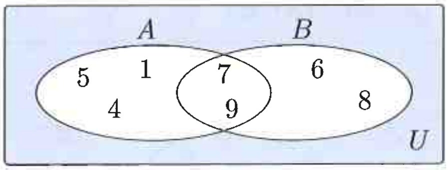
a) $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{3, 4, 5\}$ $\qquad$ $A \cup B =$ ....

11 12 14

b) $A = \{11, 12, 13\}$, $B = \{\sqrt{121}, \sqrt{144}, \sqrt{196}\}$ $\qquad$ $A \cup B =$ ....

c) $A = \{x \in \mathbf{C} : x^2 \leqslant 1\}$, $B = \{x \in \mathbf{C} : x^2 \leqslant 4\}$ $\qquad$ $A \cup B =$ ....

13. Wypisz elementy podanych zbiorów, korzystając z diagramu.



Różnicą zbiorów A i B nazywamy zbiór elementów, które należą do zbioru A i nie należą do zbioru B:

$$A \setminus B = \{x : x \in A \text{ i } x \notin B\}.$$

$A =$ $\qquad$ $B =$ $\qquad$ $A \setminus B =$

14. Wyznacz zbiory $A \setminus B$ i $B \setminus A$.

a) $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{3, 4, 5, 6\}$ $\qquad$ $A \setminus B =$ .... $B \setminus A =$ ....

b) $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $B = \{0, 2, 4\}$ $\qquad$ $A \setminus B =$ .... $B \setminus A =$ ....

c) $A = \{x \in \mathbf{C} : x^2 \leqslant 2\}$, $B = \{x \in \mathbf{C} : x^2 \leqslant 4\}$ $\qquad$ $A \setminus B =$ .... $B \setminus A =$ ....

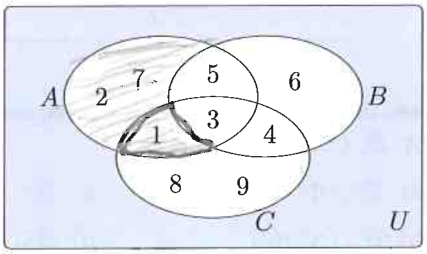
15. Wyznacz podany zbiór, korzystając z diagramu.

a) $A \setminus B =$ ....

b) $(A \setminus B) \cap C =$ ....

c) $(A \setminus B) \cup C =$ ....

d) $(A \setminus B) \setminus C =$ ....



16. a) Wypisz elementy podanych zbiorów.

$A = \{x \in \mathbf{N} : x|6\} =$ ....

$C = \{x \in \mathbf{N} : x|15\} =$ ....

$B = \{x \in \mathbf{N} : x|14\} =$ ....

b) Sprawdź, czy $A \cap B = \{1, 2\}$, $A \cup B = \{1, 2, 3, 6, 7, 14\}$ oraz $A \setminus B = \{3, 6\}$.

c) Wyznacz poniższe zbiory.

$A \cap B \cap C =$

$(A \cup B) \setminus C =$

$(A \cup B) \cap C =$

$(A \setminus B) \cup C =$

$(A \setminus B) \cap C =$

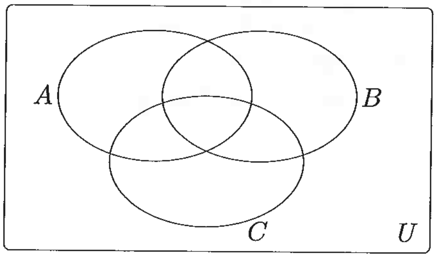
$(A \cap B) \cup C =$

$(A \cap B) \setminus C =$

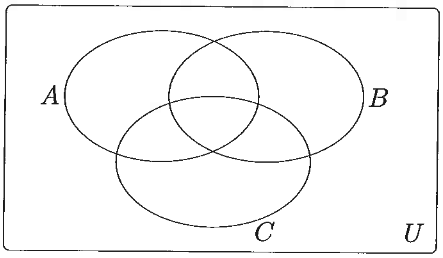
$(A \setminus B) \setminus C =$

17. Zaznacz podany zbiór na diagramie.

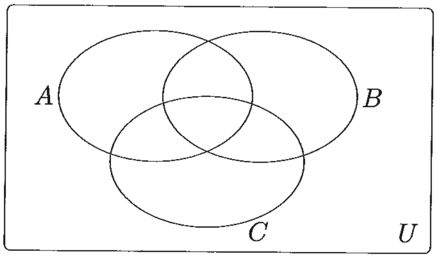
a) $A \cap B \cap C$



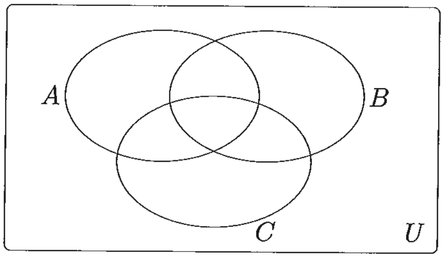
c) $(A \setminus B) \cap (A \cap C)$



b) $(A \cup B) \setminus C$



d) $(A \setminus C) \cup (B \setminus C)$



18. Zaznacz podany zbiór na diagramie, przyjmując, że żadne dwa spośród zbiorów A, B, C nie są rozłączne.

a) $B \setminus (A \cap C)$

b) $B \setminus (A \cup C)$

c) $B \cap (A \setminus C)$

d) $B \cup (A \setminus C)$

e) $B \cap (A \cup C)$

f) $B \cup (A \cap C)$

2.3. Przedziały

19. a) Uzupełnij tabelę.

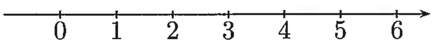
Nazwa zbioru	Oznaczenie	Warunek, który spełniają liczby x należące do zbioru	Ilustracja graficzna
przedział otwarty	$(a; b)$	$a < x < b$	
przedział domknięty	$\langle a; b\rangle$		
	$\langle a; b)$	$a \leqslant x < b$	
	$(a; b\rangle$		

b) Który ze zbiorów jest przedziałem otwartym, domkniętym, lewostronnie domkniętym, prawostronnie domkniętym?

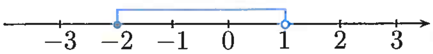
$A = \langle -3; \frac{1}{3}\rangle$ $\quad B = (\sqrt{2}; \sqrt{3}\rangle$ $\quad C = (\frac{1}{9}; \frac{1}{8})$ $\quad D = \langle -2\pi; \pi)$

20. Zaznacz na osi liczbowej zbiór liczb spełniających podany warunek. Zapisz ten zbiór w postaci przedziału.

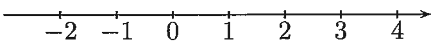
a) $1 < x < 4$



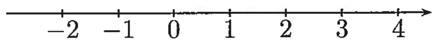
b) $-2 \leqslant x < 1$ $\quad \langle -2; 1)$



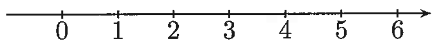
c) $0 \leqslant x \leqslant 3$



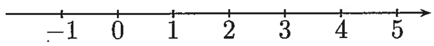
d) $-1 < x \leqslant 2$



e) $x \geqslant 3$

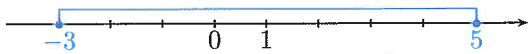


f) $x < 3$

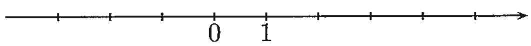


21. Zapisz warunek, który spełniają liczby należące do danego przedziału. Zaznacz ten przedział na osi liczbowej.

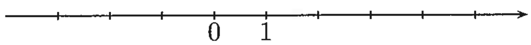
a) $\langle -3; 5\rangle$ $\quad -3 \leqslant x \leqslant 5$



b) $\langle -2; 3)$



c) $(0; 4)$



d) $(-\infty; 1\rangle$

22. Zaznacz wśród wymienionych liczb te, które należą do danego przedziału.

a) $(-9\frac{1}{2}; 3\frac{1}{2}\rangle$; $-9{,}5$; $\sqrt{12}$; $3{,}5$

b) $\langle -4\frac{1}{8}; 17\rangle$; $\sqrt{289}$; $-4\frac{1}{6}$; $-4{,}124$

c) $(-\infty; -\pi\rangle$; $-3{,}14$; $-3{,}2$; $-\sqrt{\pi}$

d) $\langle -\frac{3}{2}; \frac{5}{2})$; $-\sqrt{3}$; $-\sqrt{2}$; $\sqrt{6}$

23. Zaznacz na osi liczbowej i zapisz jako przedział zbiór liczb spełniających obie nierówności.

a) $x + 4 \geqslant \frac{1}{3}x$ i $3 + 4x \leqslant 1 - x$

b) $-2x - 6 < x$ i $\frac{1}{3}x + 1 > \frac{1}{2}x$

c) $\frac{x}{5} - \frac{x}{4} + 0{,}1 \leqslant 0$ i $\frac{x-3}{4} \leqslant \frac{x-2}{3}$

d) $0{,}3x - \frac{1}{4}x \leqslant 0{,}04$ i $4 - 0{,}02x < 6$

e) $0{,}(9) - 0{,}4x > 1$ i $\sqrt{2}x - \frac{3}{4} \leqslant 0{,}75$

f) $\frac{x}{\sqrt{2}+1} + 1 \leqslant \sqrt{2}$ i $\frac{x}{\sqrt{3}+1} \leqslant \frac{x}{\sqrt{3}-1}$

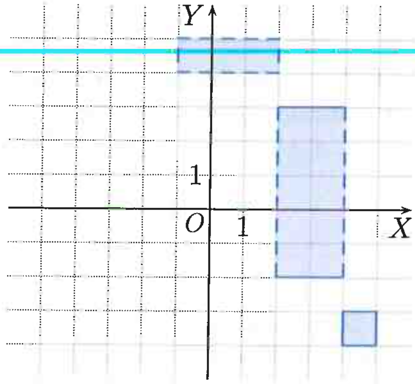
24. a) Na rysunku obok przedstawiono zbiory:

$A = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : x \in (-1;2), y \in (4;5)\}$,
$B = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : x \in \langle 4;5\rangle, y \in \langle -4;-3\rangle\}$,
$C = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : x \in (2;4), y \in \langle -2;3\rangle\}$.

Podpisz te zbiory.

b) Na tym samym rysunku przedstaw zbiory:

$D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : x \in \langle -5;1), y \in \langle -4;-3\rangle\}$,
$E = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : x \in (-4;-1), y \in \langle -2;3\rangle\}$,
$F = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : x \in \langle 4;5\rangle, y \in \langle 4;5\rangle\}$.

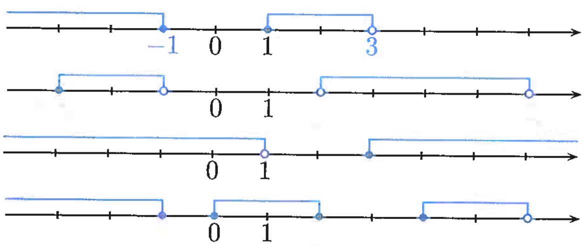


Uwaga. Symbolem $\mathbf{R}^2$ oznaczamy zbiór punktów płaszczyzny kartezjańskiej (płaszczyzny z wprowadzonym układem współrzędnych); $\mathbf{R}^2 = \{(x,y) : x \in \mathbf{R} \text{ i } y \in \mathbf{R}\}$.

2.4. Działania na przedziałach

25. Zapisz zaznaczony zbiór w postaci sumy przedziałów.

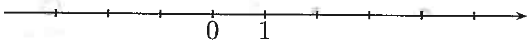
a) b) c) d)



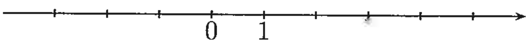
a) $(-\infty; -1\rangle \cup \langle 1; 3)$

26. Zaznacz zbiór na osi liczbowej.

a) $(-3;1) \cup \langle 2;4\rangle$



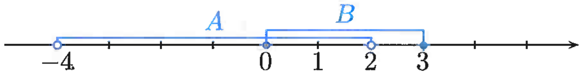
b) $\langle -2;0\rangle \cup \{3\} \cup (4;\infty)$



c) $(-\infty;-1) \cup (1;2) \cup \langle 3;\infty)$

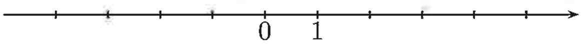
27. Zaznacz na osi liczbowej przedziały A i B, a następnie wyznacz zbiory $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ i $B \setminus A$.

a) $A = (-4; 2)$, $B = \langle 0; 3\rangle$



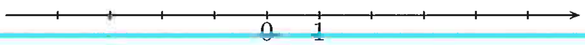
$A \cup B = (-4; 3\rangle$ $A \cap B = \langle 0; 2)$ $A \setminus B = (-4; 0)$ $B \setminus A = \langle 2; 3\rangle$

b) $A = \langle -3; 3\rangle$, $B = \langle -1; 3\rangle$



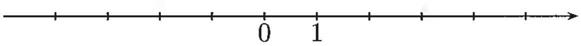
$A \cup B =$ $A \cap B =$ $A \setminus B =$ $B \setminus A =$

c) $A = (-\infty; 4)$, $B = \langle -3; 5)$



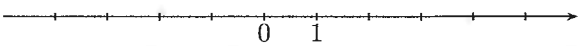
$A \cup B =$ $A \cap B =$ $A \setminus B =$ $B \setminus A =$

d) $A = (-\infty; 3\rangle$, $B = (-2; \infty)$



$A \cup B =$ $A \cap B =$ $A \setminus B =$ $B \setminus A =$

e) $A = (0; 4\rangle$, $B = \langle -2; \infty)$



$A \cup B =$ $A \cap B =$ $A \setminus B =$ $B \setminus A =$

28. Zapisz zbiory A i B w postaci przedziałów. Wyznacz zbiory $A \cap B$ oraz $A \setminus B$.

a) $A = \{x \in \mathbf{R} : 3x - 5 < 1\}$, $B = \{x \in \mathbf{R} : 1 - 2x \leqslant 3\}$

b) $A = \{x \in \mathbf{R} : 2 - 5x < 1 - 2x\}$, $B = \{x \in \mathbf{R} : \frac{1}{2}x + 0{,}75 < 1\}$

c) $A = \{x \in \mathbf{R} : -4 < 2x \leqslant 6\}$, $B = \{x \in \mathbf{R} : 1 \leqslant 3x + 1 < 7\}$

d) $A = \{x \in \mathbf{R} : -3 \leqslant 2 - x \leqslant 3\}$, $B = \{x \in \mathbf{R} : 0 < 1 - 2x \leqslant 5\}$

29. Wyznacz zbiory: $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ i $B \setminus A$.

a) $A = \langle 1; 4\rangle$, $B = \langle 2; 5\rangle$

b) $A = (-2; 1\rangle$, $B = (1; 5)$

c) $A = (-\infty; 6)$, $B = (0; 2) \cup \langle 6; \infty)$

d) $A = (2; \infty)$, $B = \langle -5; 0\rangle \cup (4; \infty)$

e) $A = (1; 3\rangle$, $B = \{-2, 0, 3, 4\}$

f) $A = \{-2, 0, 1, 3, 5\}$, $B = (3; 7\rangle$

30. Wyznacz zbiory: $A \cup (B \cap C)$, $A \cap (B \cup C)$, $(A \setminus B) \cap C$.

a) $A = \langle 1; 3\rangle$, $B = \langle 2; 5\rangle$, $C = \langle 3; 8\rangle$

b) $A = (0; 6\rangle$, $B = (1; 6)$, $C = (4; 6)$

c) $A = \langle 2; 7\rangle$, $B = (-1; 7\rangle$, $C = \langle 2; \infty)$

d) $A = \langle 3; 6)$, $B = \{3, 5, 6\}$, $C = \{6, 7\}$

31. Wyznacz dopełnienie zbioru A w zbiorze liczb rzeczywistych.

a) $A = \langle 3; 5)$ c) $A = \langle 1; 4) \cup \langle 6; \infty)$

b) $A = (-3; \infty)$ d) $A = (-3; 2) \cup \{5\}$

Dopełnieniem zbioru $A \subset \mathbf{R}$ w zbiorze liczb rzeczywistych nazywamy zbiór $A' = \mathbf{R} \setminus A$.

2.5. Wartość bezwzględna

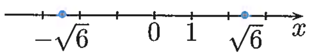
$$|a| = \begin{cases} a & \text{jeśli } a \geqslant 0 \\ -a & \text{jeśli } a < 0 \end{cases}$$

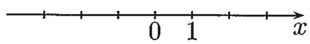
32. Uzupełnij.

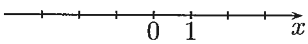
a) $|3| =$ c) $\left|\frac{1}{7}\right| =$ e) $\left|\frac{1}{5} - \frac{1}{\sqrt{5}}\right| =$

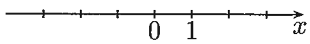
b) $|-7| =$ d) $|5 - \sqrt{5}| =$ f) $|2^3 - \pi^2| =$

33. Zaznacz na osi liczby spełniające podany warunek.

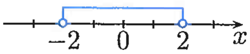
a) $|x| = \sqrt{6}$ 

c) $|x| = 0$ 

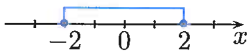
b) $|x| = 1$ 

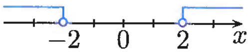
d) $|x| = \frac{5}{2}$ 

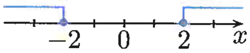
34. Podaj nierówność opisującą zaznaczony zbiór.

a) 

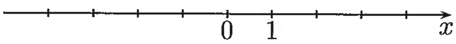
$|x| < 2$

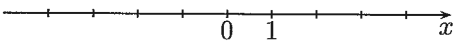
c) 

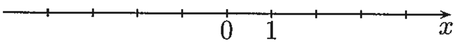
b) 

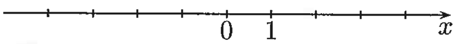
d) 

35. Zaznacz na osi liczbowej zbiór liczb rzeczywistych spełniających podaną nierówność. Zapisz go w postaci przedziału lub sumy przedziałów.

a) $|x| \geqslant 1$ 

b) $|x| < \sqrt{5}$ 

c) $|x| > \frac{3}{2}$ 

d) $|x| \leqslant \frac{5}{2}$ 

36. Wypisz wszystkie elementy zbioru A.

a) $A = \{x \in \mathbf{C} : |x| < 5\}$

b) $A = \{x \in \mathbf{C} : |x| \leqslant 3\}$

c) $A = \{x \in \mathbf{C} : |x| \leqslant \sqrt{8}\}$

d) $A = \{x \in \mathbf{C} : |x| \geqslant 2 \text{ i } |x| \leqslant 4\}$

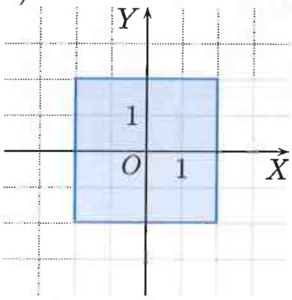
e) $A = \{x \in \mathbf{C} : |x| > 3 \text{ i } |x| < 7\}$

f) $A = \{x \in \mathbf{C} : |x| \geqslant \sqrt{2} \text{ i } |x| \leqslant \sqrt{10}\}$

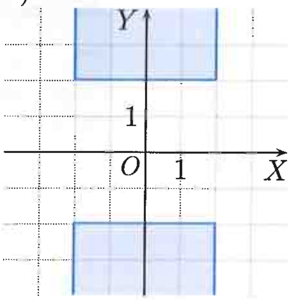
37. Uzupełnij opis przedstawionego na rysunku zbioru dwiema spośród nierówności:

$$|x| \leqslant 2,\quad |x| \geqslant 2,\quad |y| \leqslant 2,\quad |y| \geqslant 2.$$

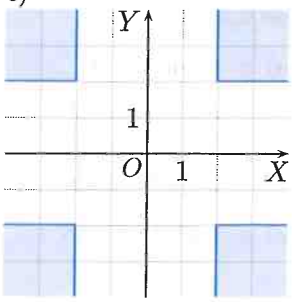
a)



b)



c)



a) $\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 :$ .... i .... $\}$

b) $\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 :$ .... i .... $\}$

c) $\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 :$ .... i .... $\}$

38. Zaznacz podany zbiór w układzie współrzędnych.

a) $\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 : |x| \leqslant 4 \text{ i } |y| \leqslant 2\}$

b) $\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 : |x| < 3 \text{ i } |y| < 1\}$

c) $\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 : |x| \leqslant 3 \text{ i } |y| < 5\}$

d) $\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 : |x| > 2 \text{ i } |y| < 3\}$

e) $\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 : |x| \leqslant 3 \text{ i } |y| > 4\}$

f) $\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 : |x| \geqslant 2 \text{ i } |y| > 3\}$

2.6. Błąd bezwzględny i błąd względny

39. Liczba a jest przybliżeniem liczby x. Oblicz błąd bezwzględny tego przybliżenia.

> Niech a będzie przybliżeniem liczby x. **Błędem bezwzględnym** przybliżenia nazywamy liczbę $|x-a|$.

a) $x = 2{,}48;\ a = 2{,}5$

c) $x = 0{,}6437;\ a = 0{,}64$

b) $x = \frac{7}{8};\ a = 0{,}9$

d) $x = \frac{15}{16};\ a = 0{,}9$

40. Dana jest liczba x. Przy którym przybliżeniu, p czy q, błąd bezwzględny przybliżenia jest mniejszy?

a) $x = 0{,}31499;\ p = 0{,}31;\ q = 0{,}32$

b) $x = 9{,}7503;\ p = 9{,}74;\ q = 9{,}76$

c) $x = \frac{1}{7};\ p = 0{,}142;\ q = 0{,}143$

d) $x = \frac{1}{13};\ p = 0{,}076;\ q = 0{,}077$

41. Oblicz błąd bezwzględny oraz błąd względny przybliżenia liczby x liczbą a. Błąd względny podaj z dokładnością do 0,1%.

> Niech a będzie przybliżeniem liczby x. Stosunek błędu bezwzględnego do wartości bezwzględnej liczby x nazywamy **błędem względnym**:
> $$\frac{|x-a|}{|x|}.$$
> Błąd względny często wyrażany jest w procentach.

a) $x = 3{,}1$; $a = 3$

b) $x = 45{,}9$; $a = 46$

c) $x = 45{,}9$; $a = 45$

42. W pewnym warsztacie samochodowym każdemu z klientów V, X, Y, Z podano przed naprawą jej szacunkowy koszt a. Rzeczywisty koszt naprawy był wyższy i wyniósł x. Oblicz błąd bezwzględny i błąd względny popełniony przy wstępnym szacowaniu kosztów napraw.

	Koszt szacunkowy a [zł]	Koszt rzeczywisty x [zł]	Błąd bezwzględny	Błąd względny
V	300	325		
X	650		75	
Y		964	144	
Z		400		25%

43. Oblicz błąd bezwzględny i błąd względny (z dokładnością do 0,01%), który popełniono, przybliżając wielkość x wielkością a.

a) $x = 98{,}5$ cm, $a = 1$ m

c) $x = 372$ min, $a = 6$ h

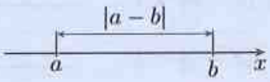
b) $x = 4700$ cm^3, $a = 5$ l

d) $x = 7806$ s, $a = 2$ h 10 min

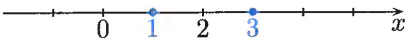
2.7. Własności wartości bezwzględnej

44. Zaznacz na osi liczbowej liczby spełniające równanie.

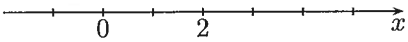
Odległość między liczbami a i b jest równa $|a-b|$.



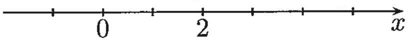
a) $|x-2|=1$



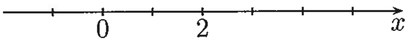
b) $|x-2|=2$



c) $|x-2|=1{,}5$



d) $|x-2|=0$



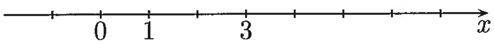
e) $|x-2|=-1$

45. Rozwiąż równanie, korzystając z interpretacji geometrycznej wartości bezwzględnej.

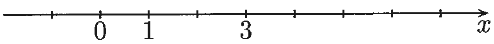
a) $|x-1|=4$

$x=-3$ lub $x=5$

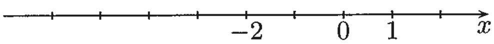
b) $|x-3|=3$



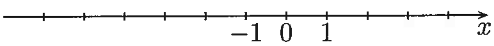
c) $|x-3|=2\frac{1}{2}$



d) $|x+2|=3$



e) $|x+1|=5$



46. Rozwiąż równanie.

$$|a-b|=|b-a|$$

a) $|1-x|=3$

b) $|4-x|=4$

c) $|2+x|=\frac{5}{2}$

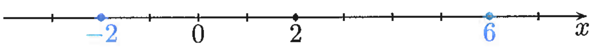
d) $|\frac{1}{2}-x|=\frac{1}{4}$

47. Równanie $\sqrt{x^2-4x+4}=4$ możemy rozwiązać w następujący sposób:

$$\sqrt{a^2}=|a|$$

$$\sqrt{(x-2)^2}=4$$

$$|x-2|=4$$



$$x=-2 \text{ lub } x=6$$

Rozwiąż równanie, stosując podaną metodę.

a) $\sqrt{x^2-6x+9}=3$

b) $\sqrt{x^2-8x+16}=\frac{9}{2}$

c) $\sqrt{x^2+10x+25}=1$

d) $\sqrt{36-12x+x^2}=2$

48. Rozwiąż nierówność, korzystając z interpretacji geometrycznej wartości bezwzględnej.

a) $|x-1| \leqslant 3$ $\quad x \in \langle -2; 4\rangle$

b) $|x-3| \leqslant 1$

c) $|x-2| < 1$

d) $|x+2| < 1$

e) $|x+\frac{1}{2}| < \frac{3}{2}$

49. Rozwiąż nierówność, korzystając z interpretacji geometrycznej wartości bezwzględnej.

a) $|x-2| > 1$ $\quad x \in (-\infty; 1) \cup (3; \infty)$

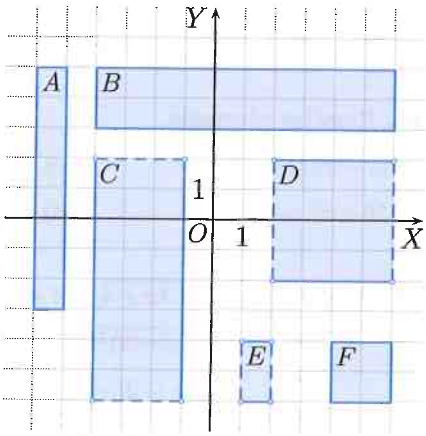
b) $|x-1| > 4$

c) $|x-3| \geqslant 2$

d) $|x+3| \geqslant 2$

e) $|x+\frac{5}{2}| > 3$

50. Dopasuj do każdego układu nierówności jeden z zaznaczonych w układzie współrzędnych zbiorów.



$\begin{cases} |x-1| \leqslant 5 \\ |y-4| \leqslant 1 \end{cases}$ B $\qquad \begin{cases} |x+\frac{5}{2}| \leqslant \frac{3}{2} \\ |y+2| < 4 \end{cases}$

$\begin{cases} |x-4| < 2 \\ |y| \leqslant 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} |x+\frac{11}{2}| \leqslant \frac{1}{2} \\ |y-1| \leqslant 4 \end{cases}$

$\begin{cases} |x-5| \leqslant 1 \\ |y+5| \leqslant 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} |x-\frac{3}{2}| < \frac{1}{2} \\ |y+5| \leqslant 1 \end{cases}$

51. Zaznacz zbiór A w układzie współrzędnych.

a) $A = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : |x-2| \leqslant 4 \;\text{ i }\; |y-1| \leqslant 3\}$

b) $A = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : |x+1| < 3 \;\text{ i }\; |y-3| < 2\}$

c) $A = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : |x+4| \leqslant 2 \;\text{ i }\; |y+2| < 3\}$

d) $A = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : |x| < 2 \;\text{ i }\; |y+3| \leqslant 1\}$

*2.8. Równania i nierówności z wartością bezwzględną

52. Rozwiąż równanie.

a) $|3x| = 18$ b) $|4x| = 6$ c) $\left|\frac{2}{3}x\right| = 1{,}4$

$|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$

53. Rozwiąż równanie.

a) $|2x - 6| = 4$ c) $\left|\frac{1}{3}x + \frac{1}{6}\right| = \frac{1}{2}$ e) $|2x-4|+|3x-6| = 10$

b) $|4x + 8| = 2$ d) $|4 - 2x| = 7$ f) $|4x - 8| + |2 - x| = 5$

54. Rozwiąż nierówność.

a) $|2x - 8| \leqslant 8$ c) $|4 - 2x| < 6$ e) $|2x - 6| + |3x - 9| < 15$

b) $|3x + 6| > 6$ d) $|-9 - 3x| \geqslant 3$ f) $|3x - 3| - |1 - x| \geqslant 8$

55. Rozwiąż nierówność.

a) $|6x| - \sqrt{4x^2} > 0$ c) $\sqrt{x^2 - 2x + 1} + |3x - 3| \leqslant 1$

b) $|x| + \sqrt{2x^2} \leqslant 1$ d) $\sqrt{9x^2 - 6x + 1} - \left|x - \frac{1}{3}\right| > 2$

56. Rozwiąż równanie, korzystając z podanej własności.

a) $\left|\frac{3}{5}x + 1\right| = 2$ c) $|x^2 - 1| = 3$

b) $\left|\sqrt{3}x + 5\right| = 6$ d) $|x^2 - 3| = 1$

Jeśli $a > 0$,
to $|p| = a$ wtedy i tylko wtedy, gdy:
$p = a$ lub $p = -a$.

57. Rozwiąż nierówność, korzystając z podanej własności.

a) $|5x + 2| < 7$ d) $|6x + 2| > 1$

b) $\left|3x - \frac{1}{2}\right| < 1\frac{1}{2}$ e) $\left|\frac{2}{3}x - 3\right| \geqslant 5$

c) $\left|\frac{1}{3}x + 2\right| \leqslant 1$ f) $\left|3x - \frac{1}{4}\right| > 0{,}125$

Jeśli $a > 0$,
to $|p| < a$ wtedy i tylko wtedy, gdy:
$-a < p < a$.

Jeśli $a > 0$,
to $|p| > a$ wtedy i tylko wtedy, gdy:
$p < -a$ lub $p > a$.

58. Punkt (x, y) nazywamy kratowym, jeśli obie jego współrzędne są liczbami całkowitymi. Podaj, ile punktów kratowych (x, y) spełnia podane warunki.

a) $|2x - 3| < 5$ i $|3y - 2| \leqslant 4$ b) $\left|\frac{3}{5}x - 1\right| < \frac{7}{5}$ i $|2y - 1| \leqslant 4\sqrt{2}$

59. Zaznacz w układzie współrzędnych zbiór punktów (x, y) spełniających warunek:

$$|x| + |y| \leqslant 4.$$

Ile punktów kratowych należy do tego zbioru?