6. Planimetria

6.1. Miary kątów w trójkącie

1. Dany jest trójkąt o kątach α, β, γ. Uzupełnij tabelę.

α	β	γ	Trójkąt
$18°$	$95°$		rozwartokątny
	$46°15'$	$45°37'$	
$37°$	$53°$		
$31°40'$		$38°30'$	

Suma kątów wewnętrznych trójkąta jest równa 180°.

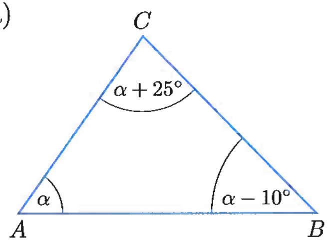
Trójkąt **ostrokątny** ma wszystkie kąty ostre.

Trójkąt **prostokątny** ma jeden kąt prosty.

Trójkąt **rozwartokątny** ma jeden kąt rozwarty.

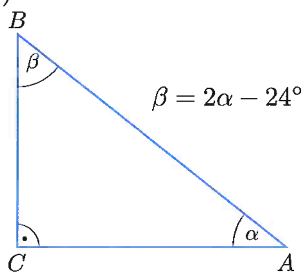
2. Wyznacz miary kątów trójkąta ABC.

a)



$\sphericalangle CAB =$ $\sphericalangle ABC =$ $\sphericalangle BCA =$

b)



$\sphericalangle CAB =$ $\sphericalangle ABC =$

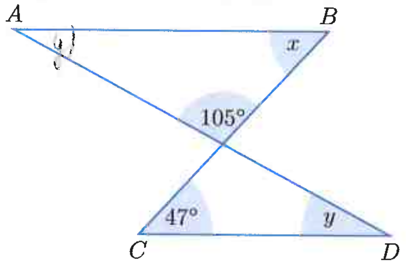
3. Kąty α, β i γ są kątami wewnętrznymi trójkąta. Wyznacz miarę kąta γ, jeżeli:

a) kąt β jest dwa razy większy od kąta α, a kąt γ jest trzy razy mniejszy od kąta α,

b) kąt β jest sześć razy większy od kąta α, a kąt γ jest dwa razy mniejszy od kąta β.

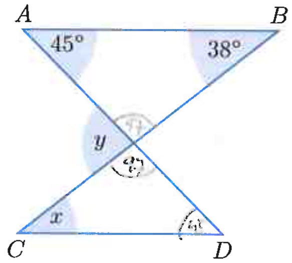
4. Wyznacz kąty x i y, jeśli wiadomo, że $AB \parallel CD$.

a)



$x =$ 47 $y =$ 28

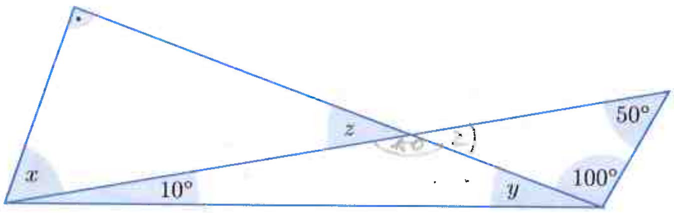
b)



$x =$ 38 $y =$ 83

5. Wyznacz kąty x, y i z.

a)

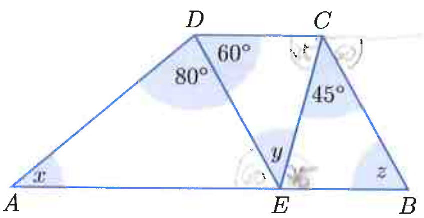


$x =$ 60

$y =$ 20

$z =$ 30

b) $AB \parallel CD$, $DE \parallel CB$



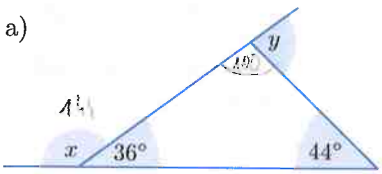
$x =$ 40

$y =$ 45

$z =$ 60

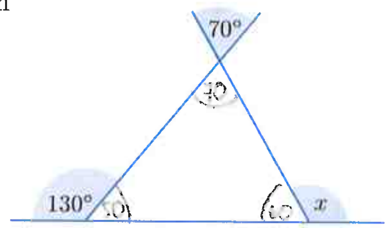
6. Podaj miary zaznaczonych kątów zewnętrznych trójkąta.

a)



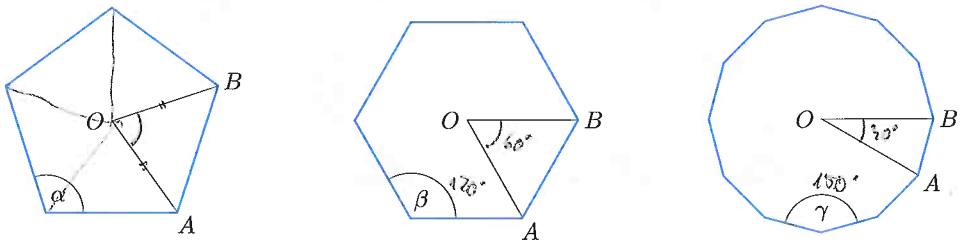
$x =$ 144 $y =$ 80

b)



$x =$ 120

7. Na rysunkach przedstawiono trzy wielokąty foremne: pięciokąt, sześciokąt i dwunastokąt. Dla każdego z tych wielokątów podaj miary kątów trójkąta AOB (punkt O jest środkiem okręgu opisanego na wielokącie) oraz miary kątów zawartych między sąsiednimi bokami wielokąta.



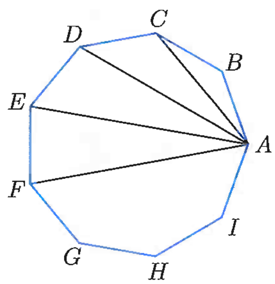
$360°:5 = 72°$

$180°-72° = 108°$

8. Uzasadnij, że w dowolnym n-kącie foremnym kąt między dwoma sąsiednimi bokami ma miarę $\frac{n-2}{n} \cdot 180°$.

9. Na rysunku przedstawiono dziewięciokąt foremny. Podaj miary kątów trójkąta:

a) ABC, b) ACD, c) ADE, d) AEF.



10. W pewnym trójkącie miary kątów wynoszą α, β, γ. Sprawdź, czy trójkąt ten jest równoramienny, jeśli:

a) $\gamma = 4\alpha$, $\alpha + \beta = 60°$, b) $\alpha = \beta + 20°$, $\gamma - 3\beta = 10°$, c) $2\alpha + \beta = 180°$.

6.2. Trójkąty przystające

11. Wskaż pary trójkątów przystających.

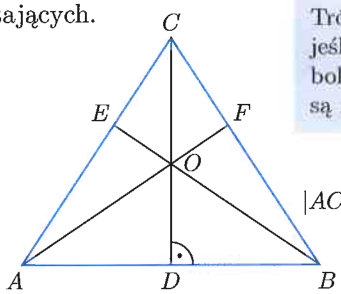
$\triangle AOC \equiv \triangle BOC$

$\triangle ADC \equiv$ ....

$\triangle BOF \equiv$ ....

$\triangle COF \equiv$ ....

$\triangle DOB \equiv$ ....



$|AC| = |BC|$

Trójkąty są **przystające**, jeśli ich odpowiednie boki i odpowiednie kąty są równe.

CECHY PRZYSTAWANIA TRÓJKĄTÓW

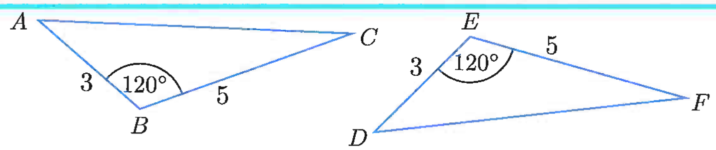
Cecha BBB – jeśli trzy boki jednego trójkąta są odpowiednio równe trzem bokom drugiego trójkąta, to trójkąty te są przystające.

Cecha BKB – jeśli dwa boki i zawarty między nimi kąt w jednym trójkącie są odpowiednio równe dwóm bokom i zawartemu między nimi kątowi w drugim trójkącie, to trójkąty te są przystające.

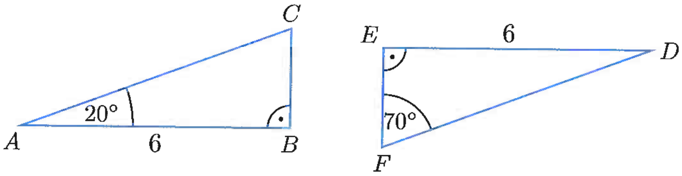
Cecha KBK – jeśli bok i dwa leżące przy nim kąty w jednym trójkącie są odpowiednio równe bokowi i dwóm leżącym przy nim kątom w drugim trójkącie, to trójkąty te są przystające.

12. Na podstawie której cechy można stwierdzić, że trójkąty ABC i DEF są przystające?

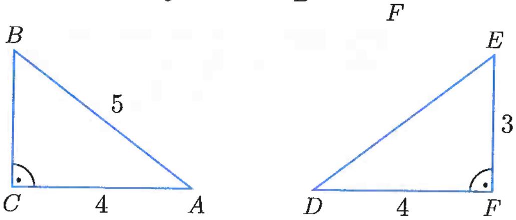
a)



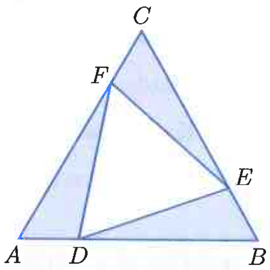
b)



c)



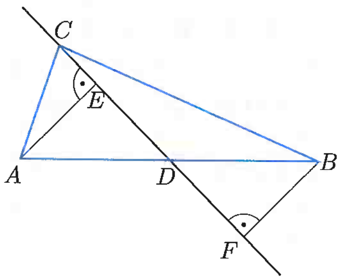
13. Trójkąt ABC jest trójkątem równobocznym (patrz rysunek). Odcinki AD, BE i CF mają równe długości. Uzasadnij, że trójkąt DEF jest trójkątem równobocznym.



14. Poprowadzono dwie styczne do okręgu przecinające się w punkcie P. Wykaż, że odcinki łączące punkty styczności z punktem P mają równe długości.

15. W trójkącie ABC poprowadzono środkową CD (patrz rysunek). Odległość punktu A od prostej CD jest równa 4. Oblicz odległość punktu B od prostej CD.

Wskazówka. Wykaż, że trójkąty AED i BFD są przystające.



16. Czy można skonstruować trójkąt o podanych bokach? Uzasadnij odpowiedź.

a) 17, 35, 19 ....

b) $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ ....

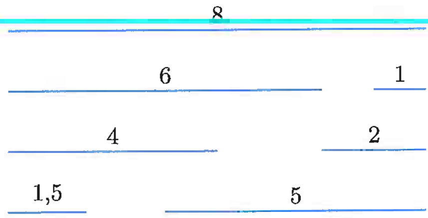
c) $\sqrt{196}$, 1, $\sqrt{169}$ ....

d) $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{4}$ ....

Z odcinków długości a, b, c można zbudować trójkąt tylko wtedy, gdy $a + b > c$, gdzie c jest długością najdłuższego odcinka.

17. Spośród narysowanych poniżej odcinków możemy wybrać trzy takie odcinki, z których da się zbudować trójkąt. Wypisz długości boków każdego z takich trójkątów (jest ich 9).

5, 6, 8



6.3. Trójkąty podobne

Dwa wielokąty są **podobne**, jeśli ich odpowiednie kąty są równe, a odpowiednie boki – proporcjonalne.

18. Wskaż zdania prawdziwe.

- ☐ A. Każde dwa trójkąty równoboczne są podobne.
- ☐ B. Każde dwa trójkąty prostokątne są podobne.
- ☐ C. Każde dwa prostokąty są podobne.
- ☐ D. Każde dwa romby są podobne.
- ☐ E. Każde dwa kwadraty są podobne.

CECHY PODOBIEŃSTWA TRÓJKĄTÓW

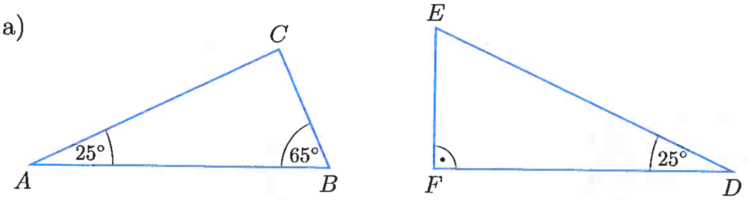
Cecha BBB – jeśli trzy boki jednego trójkąta są odpowiednio proporcjonalne do trzech boków drugiego trójkąta, to trójkąty te są podobne.

Cecha KKK – jeśli kąty jednego trójkąta są równe kątom drugiego trójkąta, to trójkąty te są podobne.

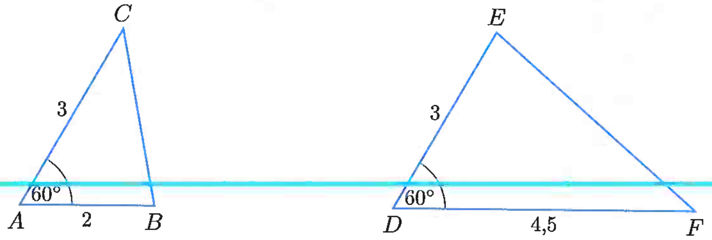
Cecha BKB – jeśli dwa boki jednego trójkąta są proporcjonalne do dwóch boków drugiego trójkąta i zawarte między tymi bokami kąty są równe, to trójkąty te są podobne.

19. Na podstawie której cechy można stwierdzić, że trójkąty ABC i DEF są podobne?

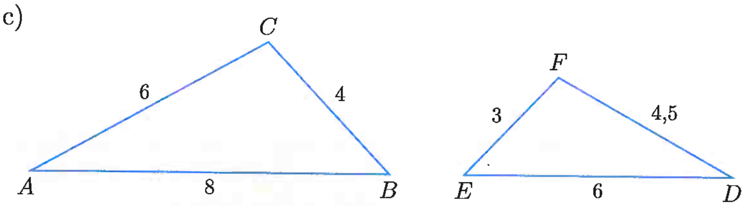
a)



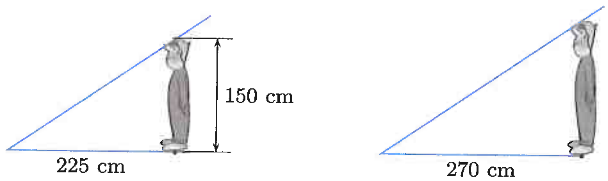
b)



c)



20. Staszek i Franek wybrali się na spacer w słoneczny dzień. Na rysunku podano długości ich cieni oraz wzrost Staszka. Oblicz wzrost Franka.

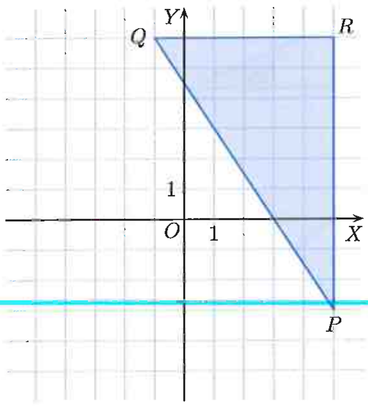


21. Dwa trójkąty prostokątne są podobne. Przyprostokątne jednego z nich mają długości 5 cm i 12 cm. Przeciwprostokątna drugiego ma długość 39 cm. Oblicz obwód każdego z tych trójkątów.

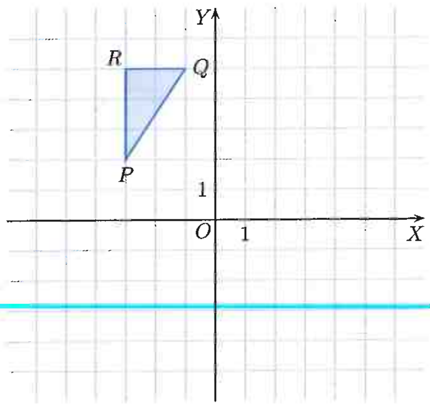
22. Narysuj trójkąt ABC, którego wierzchołkami są punkty o współrzędnych:

a) $A(1,-3)$, $B(-5,1)$, $C(-5,-3)$, b) $A(3,6)$, $B(-5,-5)$, $C(3,-5)$.

Czy trójkąty ABC i PQR są podobne? Zaznacz poprawną odpowiedź.



☐ TAK ☐ NIE

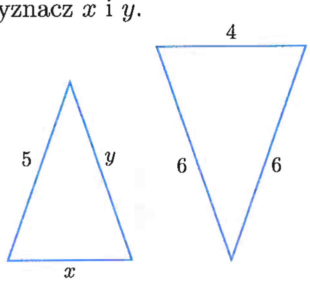


☐ TAK ☐ NIE

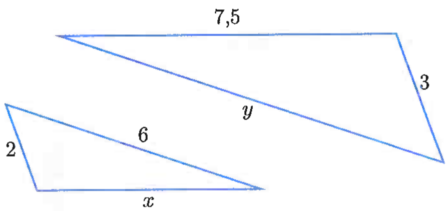
23. Przedstawione na rysunku trójkąty są podobne. Podaj skalę podobieństwa k oraz wyznacz x i y.

Stosunek długości odpowiednich boków trójkątów podobnych nazywamy skalą podobieństwa.

a)



b)



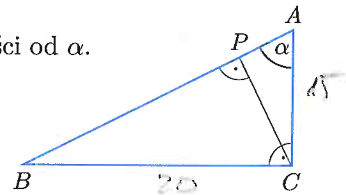
24. Trójkąty T_1 i T_2 są podobne. W tabeli podano długości ich boków od najkrótszego do najdłuższego ($a_1 < b_1 < c_1$ i $a_2 < b_2 < c_2$) oraz skale podobieństwa. Uzupełnij brakujące dane.

Trójkąt T_1			Trójkąt T_2			Skala podobieństwa $k = \frac{a_1}{a_2}$
a_1	b_1	c_1	a_2	b_2	c_2	
19	23	27	9,5	11,5	13,5	
7,5				7	9	$\frac{3}{2}$
	8	10	9	12		
2	$\sqrt{6}$				$\sqrt{6}$	$\sqrt{2}$

25. a) Wyznacz miary kątów PBC oraz BCP w zależności od α.

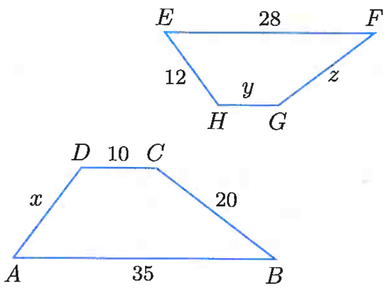
b) Uzasadnij, że $\triangle ACP \sim \triangle CBP \sim \triangle ABC$.

c) Oblicz długości odcinków AP i BP, jeśli $|AC| = 15$ cm i $|BC| = 20$ cm.



6.4. Wielokąty podobne

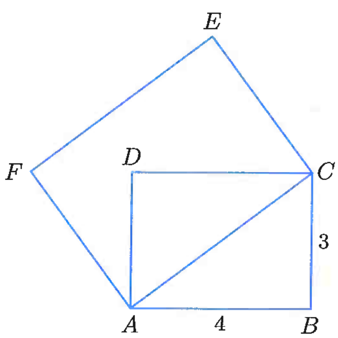
26. Trapezy $ABCD$ i $EFGH$ są podobne. Wyznacz x, y i z.



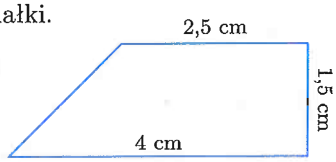
27. Prostokąt P_1 o bokach a_1 i b_1 ($a_1 < b_1$) jest podobny do prostokąta P_2 o bokach a_2 i b_2 ($a_2 < b_2$). Uzupełnij tabelę.

Prostokąt P_1				Prostokąt P_2				Skala podobieństwa $k = \frac{a_1}{a_2}$
a_1	b_1	Obwód	Pole	a_2	b_2	Obwód	Pole	
12	18			4				
3	6					24		
			15	6	10			

28. Prostokąt $ACEF$ jest podobny do prostokąta $ABCD$. Oblicz długości boków prostokąta $ACEF$.



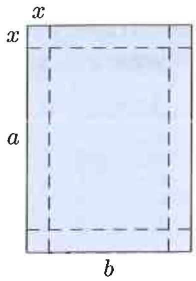
29. Działka budowlana ma kształt trapezu prostokątnego. Jej plan w skali 1 : 2000 przedstawiono na rysunku. Oblicz obwód i pole tej działki.



30. Podstawy trapezu mają długości 12 cm i 18 cm. W jakim stosunku dzielą się przekątne tego trapezu?

31. Stosunek pól dwóch trapezów podobnych jest o 12 większy od stosunku ich obwodów. Wyznacz skalę podobieństwa tych trapezów.

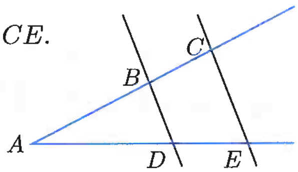
32. Z prostokątnej kartki o wymiarach $a \times b$ $(a \neq b)$ odcięto z każdej strony pasek o szerokości x (rysunek obok). Uzasadnij, że powstały prostokąt nie jest podobny do wyjściowego.



6.5. Twierdzenie Talesa

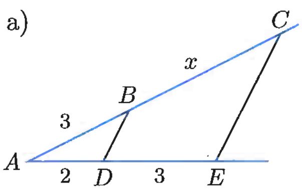
33. Uzupełnij poniższe równości, jeśli wiadomo, że $BD \parallel CE$.

$\frac{|AB|}{|AD|} = \frac{|BC|}{\square}$ $\quad$ $\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{\square}{|AE|}$ $\quad$ $\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|BD|}{\square}$

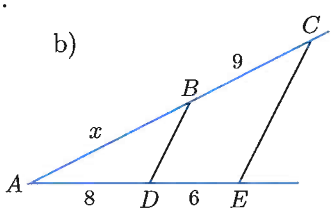


34. Oblicz x, jeśli $BD \parallel CE$.

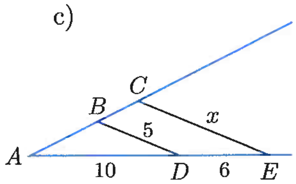
a)



b)

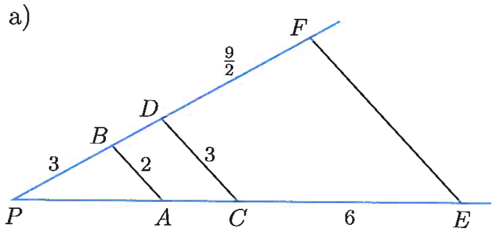


c)

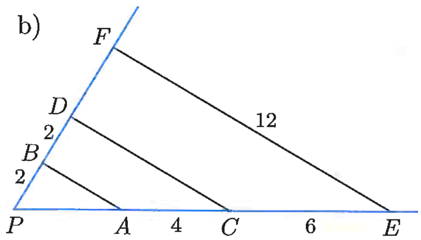


35. Oblicz długości podanych odcinków, wiedząc, że $AB \parallel CD \parallel EF$.

a)



b)

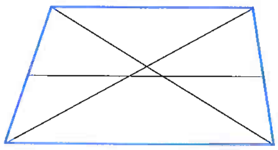


$|BD| =$ ...... $|PA| =$ ...... $|PA| =$ ...... $|AB| =$ ......

$|PC| =$ ...... $|EF| =$ ...... $|DF| =$ ...... $|CD| =$ ......

36. Przekątne trapezu dzielą się w stosunku $3:4$, a odcinek łączący środki jego ramion ma długość 14 cm. Oblicz długość dłuższej podstawy trapezu.

Wskazówka. Długość odcinka łączącego środki ramion trapezu jest średnią arytmetyczną długości jego podstaw.



37. W trójkącie ABC wysokość CD ma długość 4 oraz $|AD| = 3$ i $|BD| = 6$. Punkty K i L są położone na brzegu trójkąta w ten sposób, że odcinek KL jest równoległy do wysokości CD i dzieli trójkąt ABC na dwie figury o równych polach. Oblicz $|KL|$, jeśli kąt BAC jest: a) ostry, b) rozwarty.

6.6. Trójkąty prostokątne

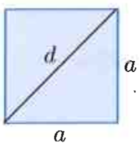
38. Dany jest trójkąt prostokątny o przyprostokątnych a, b i przeciwprostokątnej c. Uzupełnij tabelę.

a	b	c
4	$2\sqrt{2}$	
$3\sqrt{2}$		$3\sqrt{5}$
	2	$\frac{5}{2}$

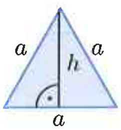
39. Sprawdź, czy trójkąt o podanych bokach jest prostokątny.

a) $5,\ 12,\ 13$ b) $3\sqrt{6},\ 2\sqrt{3},\ 8$ c) $2-\sqrt{3},\ 1+2\sqrt{3},\ 2\sqrt{5}$

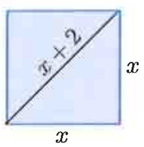
40. Wyznacz wzór na przekątną kwadratu o boku a.

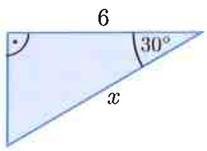


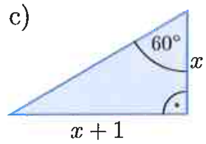
41. Wyznacz wzór na wysokość trójkąta równobocznego o boku a.



42. Oblicz x.

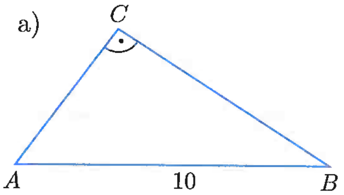
a)


b)


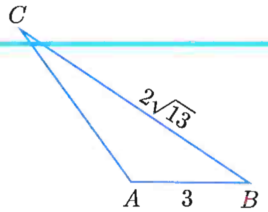
c)


43. Narysuj wysokość trójkąta ABC opuszczoną z wierzchołka C. Oblicz obwód tego trójkąta, jeśli wiadomo, że wysokość ta jest równa 4.

a)



b)



44. a) Oblicz obwód trapezu równoramiennego o podstawach długości 16 cm i 24 cm oraz wysokości 8 cm.

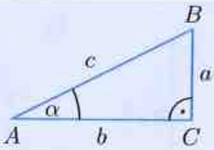
b) Oblicz obwód rombu o przekątnych długości 10 cm i 24 cm.

45. W kole o promieniu 6 cm poprowadzono cięciwę o długości 4 cm. Oblicz jej odległość od środka koła.

6.7. Funkcje trygonometryczne kąta ostrego

$\sin\alpha = \frac{a}{c}$ $\qquad$ $\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$

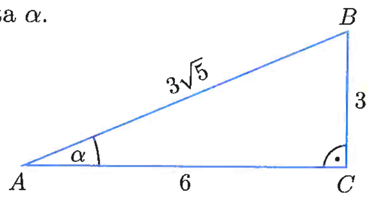
$\cos\alpha = \frac{b}{c}$ $\qquad$ $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a}$



46. Podaj wartości funkcji trygonometrycznych kąta α.

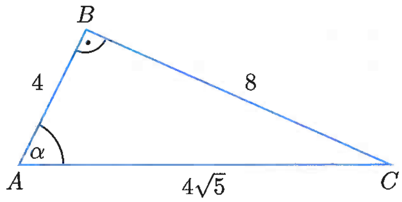
a) $\sin\alpha =$ $\qquad$ $\operatorname{tg}\alpha =$

$\cos\alpha =$ $\qquad$ $\operatorname{ctg}\alpha =$



b) $\sin\alpha =$ $\operatorname{tg}\alpha =$

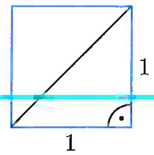
$\cos\alpha =$ $\operatorname{ctg}\alpha =$



47. Wyznacz wartości funkcji trygonometrycznych kątów ostrych trójkąta prostokątnego o podanych bokach.

a) 9, 12, 15 b) 2, 3, $\sqrt{13}$ c) 1, 3, $\sqrt{10}$

48. Wyznacz wartości funkcji trygonometrycznych kąta 45°.

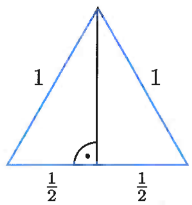


$\sin 45^\circ =$ $\cos 45^\circ =$ $\operatorname{tg} 45^\circ =$ $\operatorname{ctg} 45^\circ =$

49. Wyznacz wartości funkcji trygonometrycznych kąta 30°.

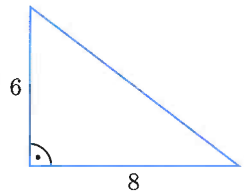
$\sin 30^\circ =$ $\operatorname{tg} 30^\circ =$

$\cos 30^\circ =$ $\operatorname{ctg} 30^\circ =$

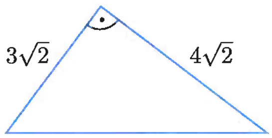


50. Zaznacz na rysunku kąt α, dla którego $\operatorname{tg}\alpha = \frac{4}{3}$.

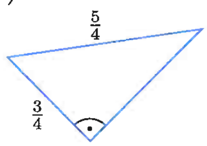
a)



b)

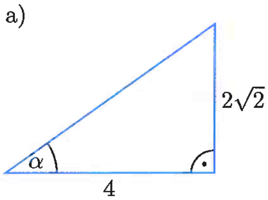


c)



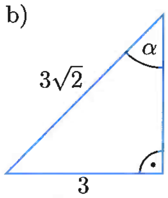
51. Uzupełnij jednym z symboli: >, <, =.

a)



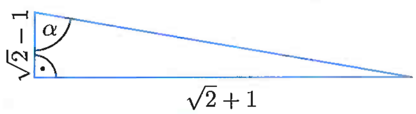
$\operatorname{ctg}\alpha \ \square \ 1$

b)



$\operatorname{ctg}\alpha \ \square \ 1$

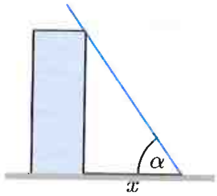
c)



$\operatorname{ctg}\alpha \ \square \ 1$

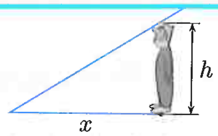
52. Bok rombu ma długość $\sqrt{5}$, a jedna z jego przekątnych – 4. Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kątów ostrych trójkątów, na które dzielą romb jego przekątne.

6.8. Trygonometria – zastosowania



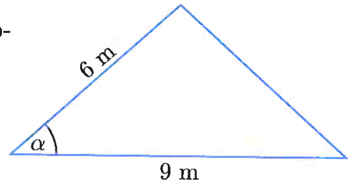
53. Oblicz wysokość budynku, którego cień ma długość x w momencie, gdy promienie słoneczne tworzą z powierzchnią ziemi kąt α.

a) $x = 5$ m, $\alpha = 58°$ b) $x = 12$ m, $\alpha = 39°$

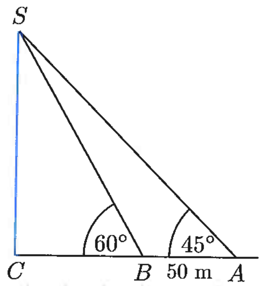


54. Jaki kąt z powierzchnią ziemi tworzą promienie słoneczne, jeśli osoba o wzroście h rzuca cień długości x?

a) $h = 170$ cm, $x = 0{,}9$ m b) $h = 180$ cm, $x = 3$ m



55. Przekrój poprzeczny dachu jest trójkątem równoramiennym o podstawie długości 9 m i ramionach długości 6 m. Oblicz cosinus kąta nachylenia dachu (patrz kąt α na rysunku). Odczytaj z tablic przybliżoną wartość tego kąta.



56. Wierzchołek S komina jest widoczny z powierzchni ziemi pod kątem 45°, a po przejściu 50 m w kierunku komina – pod kątem 60° (patrz rysunek). Oblicz wysokość komina.

57. O ile wyżej sięgnie sześciometrowa drabina ustawiona pod kątem 73° do ziemi od takiej samej drabiny ustawionej pod kątem 53°?

58. Turysta idzie prostą drogą wznoszącą się pod kątem 5°.

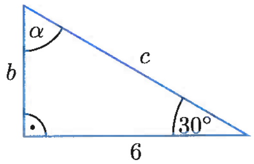
a) Jaką różnicę poziomów pokona po przejściu 0,5 km?

b) Jak długo musiałby iść tą drogą z szybkością 4,5 km/h, aby pokonać różnicę poziomów równą 130 m?

6.9. Rozwiązywanie trójkątów prostokątnych

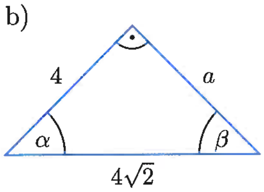
59. Rozwiąż trójkąt prostokątny.

a)



$b =$ $c =$ $\alpha =$

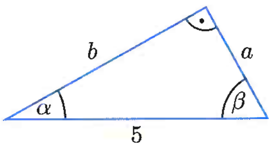
b)



$a =$ $\alpha =$ $\beta =$

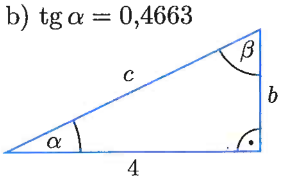
60. Rozwiąż trójkąt prostokątny.

a) $\cos\alpha = 0{,}8746$



$a \approx$ $b \approx$ $\alpha \approx$ $\beta \approx$

b) $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}4663$



$b \approx$ $c \approx$ $\alpha \approx$ $\beta \approx$

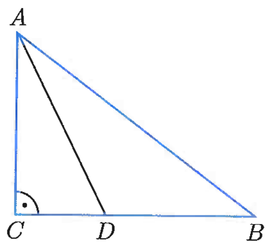
61. Oblicz pole i obwód trójkąta równoramiennego:

a) o ramieniu długości 4 i kącie przy podstawie $37°$,

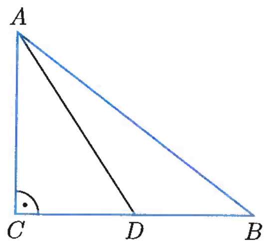
b) o podstawie długości 10 i kącie między ramionami $70°$.

62. W trójkącie ABC kąt CAB ma miarę $54°$, a $|AB| = 10$. Oblicz długość odcinka AD, jeżeli:

a) AD jest dwusieczną kąta CAB,



b) AD jest środkową.

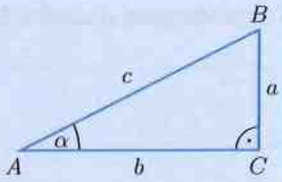


63. a) Oblicz długości przekątnych rombu, którego bok ma długość 5 cm, a kąt ostry ma miarę $48°$.

b) Oblicz obwód i pole trapezu równoramiennego o podstawach długości 8 cm i 10 cm oraz kącie ostrym $72°$.

6.10. Związki między funkcjami trygonometrycznymi

$\sin\alpha = \frac{a}{c}$, $\cos\alpha = \frac{b}{c}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a}$



Podstawowe tożsamości trygonometryczne

1. $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$
2. $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$
3. $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$
4. $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$

64. Dokończ dowód jedynki trygonometrycznej.

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} =$

65. Napisz tożsamość trygonometryczną, której uzasadnieniem jest podana równość (przy oznaczeniach z powyższego rysunku).

a) $\frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} = \frac{a}{b}$

b) $\frac{1}{\frac{a}{b}} = \frac{b}{a}$

c) $\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1$

66. Oblicz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta ostrego α, jeśli:

a) $\sin\alpha = \frac{3}{4}$,

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$\left(\frac{3}{4}\right)^2 + \cos^2\alpha = 1$

$\cos^2\alpha = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{7}{16}$

$\cos\alpha = \frac{\sqrt{7}}{4}$

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} =$

$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} =$

c) $\cos\alpha = \frac{1}{5}$,

b) $\cos\alpha = 0{,}1$,

d) $\sin\alpha = \frac{24}{25}$.

67. Korzystając z tożsamości: $\operatorname{tg}^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha}$, wyznacz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta ostrego α, jeżeli $\operatorname{tg}\alpha = 4$.

68. Korzystając z tożsamości: $\operatorname{ctg}^2\alpha + 1 = \frac{1}{\sin^2\alpha}$, wyznacz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta ostrego α, jeśli:

a) $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{7}$,
b) $\operatorname{ctg}\alpha = 3$,
c) $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{20}{21}$.

69. Czy istnieje kąt α, dla którego:

a) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ i $\sin(90^\circ - \alpha) = \frac{1}{2}$,

b) $\cos\alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$ i $\cos(90^\circ - \alpha) = \frac{2\sqrt{5}}{5}$,

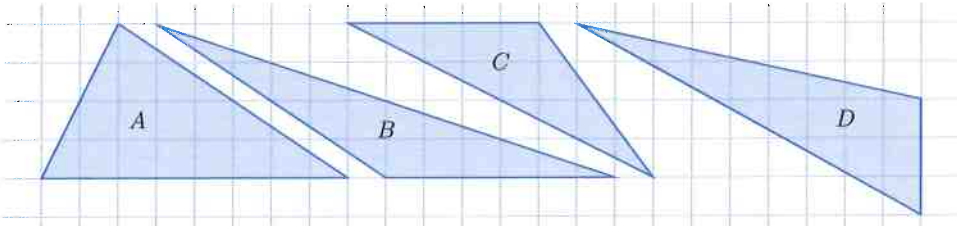
c) $\sin\alpha = \frac{2}{5}$ i $\sin(90^\circ - \alpha) = \frac{3}{5}$,

d) $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{2}$ i $\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = \frac{\sqrt{2}}{2}$?

$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha$
$\cos(90^\circ - \alpha) = \sin\alpha$
$\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = \operatorname{ctg}\alpha$
$\operatorname{ctg}(90^\circ - \alpha) = \operatorname{tg}\alpha$

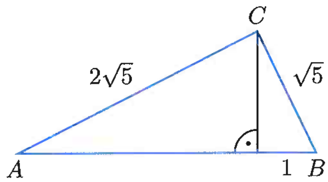
6.11. Pole trójkąta

70. Oblicz pola poniższych trójkątów. Przyjmij, że bok kratki ma długość 1.



$P_A =$ $P_B =$ $P_C =$ $P_D =$

71. Oblicz pole trójkąta ABC.



72. Oblicz pole trójkąta równobocznego, którego:

a) obwód jest równy 30 cm,

b) wysokość jest równa $3\sqrt{3}$ cm.

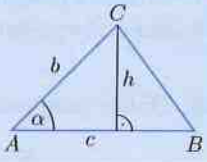
Pole trójkąta równobocznego o boku a wyraża się wzorem:

$$P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

73. Oblicz wysokość trójkąta równobocznego o polu: a) $12\sqrt{3}$ cm^2, b) 100 cm^2.

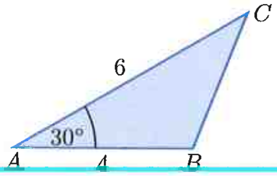
Pole trójkąta jest równe połowie iloczynu długości dwóch jego boków i sinusa kąta zawartego między nimi.

$$P_{\triangle} = \frac{1}{2} bc \sin\alpha$$

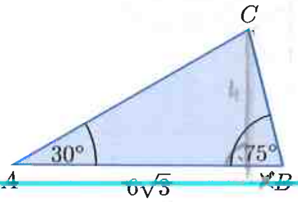


74. Oblicz pole trójkąta ABC.

a)



b)



$tg\,30° = \frac{h}{6\sqrt{3}} \Rightarrow h = 6\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = 6$

$P = \frac{1}{2} \cdot 6\sqrt{3} \cdot 6 = 18\sqrt{3}$

$tg\,30° = \frac{h}{6\sqrt{3} - x}$

$tg\,75° = \frac{h}{x} \Rightarrow h = x \cdot tg\,75°$

75. Oblicz pole trójkąta ABC, jeżeli:

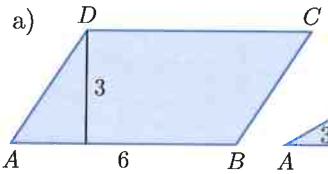
a) $|AC| = 4$, $|AB| = 7$, $\sphericalangle BAC = 60°$,

b) $|AC| = 6$, $\sphericalangle ABC = \sphericalangle ACB = 67°30'$.

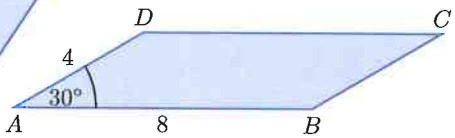
6.12. Pole czworokąta

76. Oblicz pole równoległoboku $ABCD$.

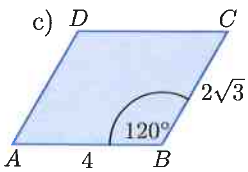
a)



b)

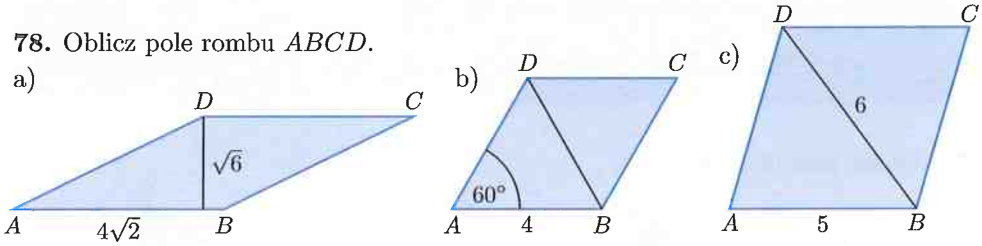


c)



77. Boki równoległoboku mają długości 6 i 8, a jego kąt ostry ma miarę 30°. Oblicz wysokość równoległoboku opuszczoną na dłuższy bok.

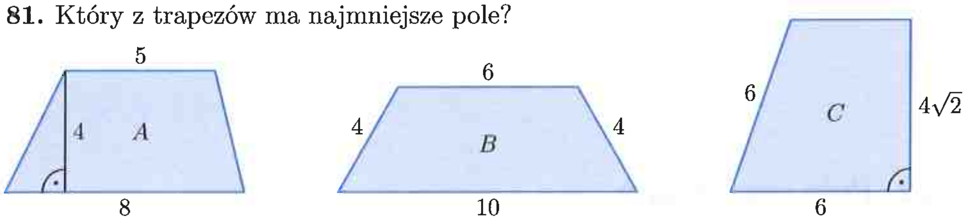
78. Oblicz pole rombu $ABCD$.



79. Oblicz wysokość rombu o przekątnych długości 10 i 24.

80. Długość boku rombu jest równa $3\sqrt{5}$, a jedna z jego przekątnych jest dwa razy dłuższa od drugiej. Oblicz pole tego rombu.

81. Który z trapezów ma najmniejsze pole?

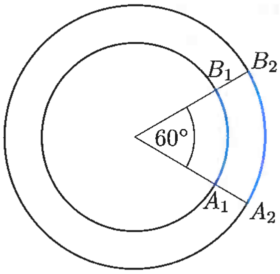


82. a) Dany jest trapez równoramienny o kącie ostrym 30° i podstawach długości 16 i 12. Oblicz obwód i pole tego trapezu.

b) Podstawy trapezu równoramiennego mają długości 3 i 7, a przekątna $2\sqrt{13}$. Oblicz pole tego trapezu.

6.13. Długość okręgu i pole koła

83. Na rysunku przedstawiono okręgi o promieniach $r_1 = 2{,}5$ i $r_2 = 3{,}5$.



a) Oblicz długości tych okręgów.

$l_1 =$ ....

$l_2 =$ ....

b) Oblicz długości łuków $\overset{\frown}{A_1B_1}$ i $\overset{\frown}{A_2B_2}$.

$L_1 =$ ....

$L_2 =$ ....

Długość łuku okręgu o promieniu r wyznaczonego przez kąt o mierze α:

$$L = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi r.$$

84. Uzupełnij tabelę.

a)

	Okrąg O_1	Okrąg O_2	Okrąg O_3
Promień	3,6 cm		
Długość okręgu			9,6 cm
Długość łuku wyznaczonego przez kąt 30°		7π cm	

b)

	Okrąg O_1	Okrąg O_2	Okrąg O_3
Promień	6 dm		9 cm
Kąt α	75°	20°	
Długość łuku wyznaczonego przez kąt α		2π cm	4π cm

85. Oblicz długość łuku okręgu o promieniu 12 cm wyznaczonego przez kąt α.

a) $\alpha = 270^\circ$ b) $\alpha = 330^\circ$ c) $\alpha = 21^\circ$ d) $\alpha = 7^\circ 30'$

86. Oblicz pole wycinka koła o promieniu 6 cm wyznaczonego przez kąt α.

a) $\alpha = 40^\circ$ ....

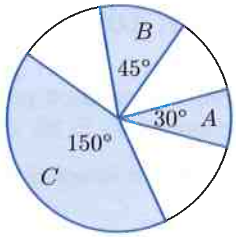
b) $\alpha = 120^\circ$ ....

c) $\alpha = 90^\circ$ ....

Pole wycinka koła o promieniu r wyznaczonego przez kąt o mierze α:

$$P = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot \pi r^2.$$

87. Dane jest koło o promieniu 12. Oblicz pola zaznaczonych wycinków tego koła.



$P_A =$ ....

$P_B =$ ....

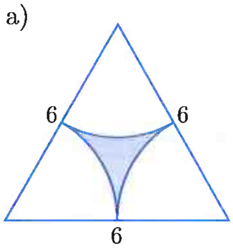
$P_C =$ ....

88. a) Pole wycinka koła wyznaczonego przez kąt 140° jest równe 7π. Oblicz promień tego koła.

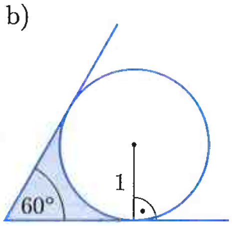
b) Pole wycinka koła o promieniu r wyznaczonego przez kąt $\alpha < 180°$ jest równe P. Ile jest równe pole wycinka koła o promieniu $2r$ wyznaczonego przez kąt 2α?

89. Oblicz pole zacieniowanego obszaru.

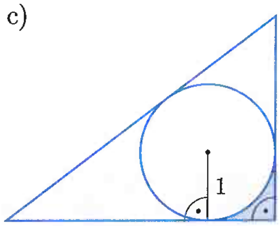
a)



b)

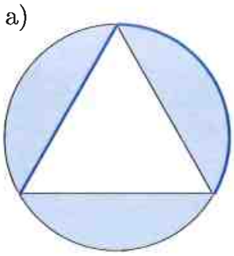


c)

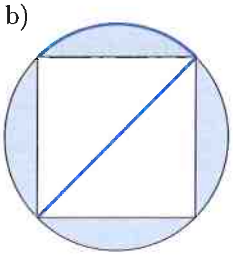


90. Dany jest wielokąt foremny wpisany w koło o promieniu 2. Oblicz długość zaznaczonej linii oraz pole zacieniowanego obszaru.

a)



b)



c)